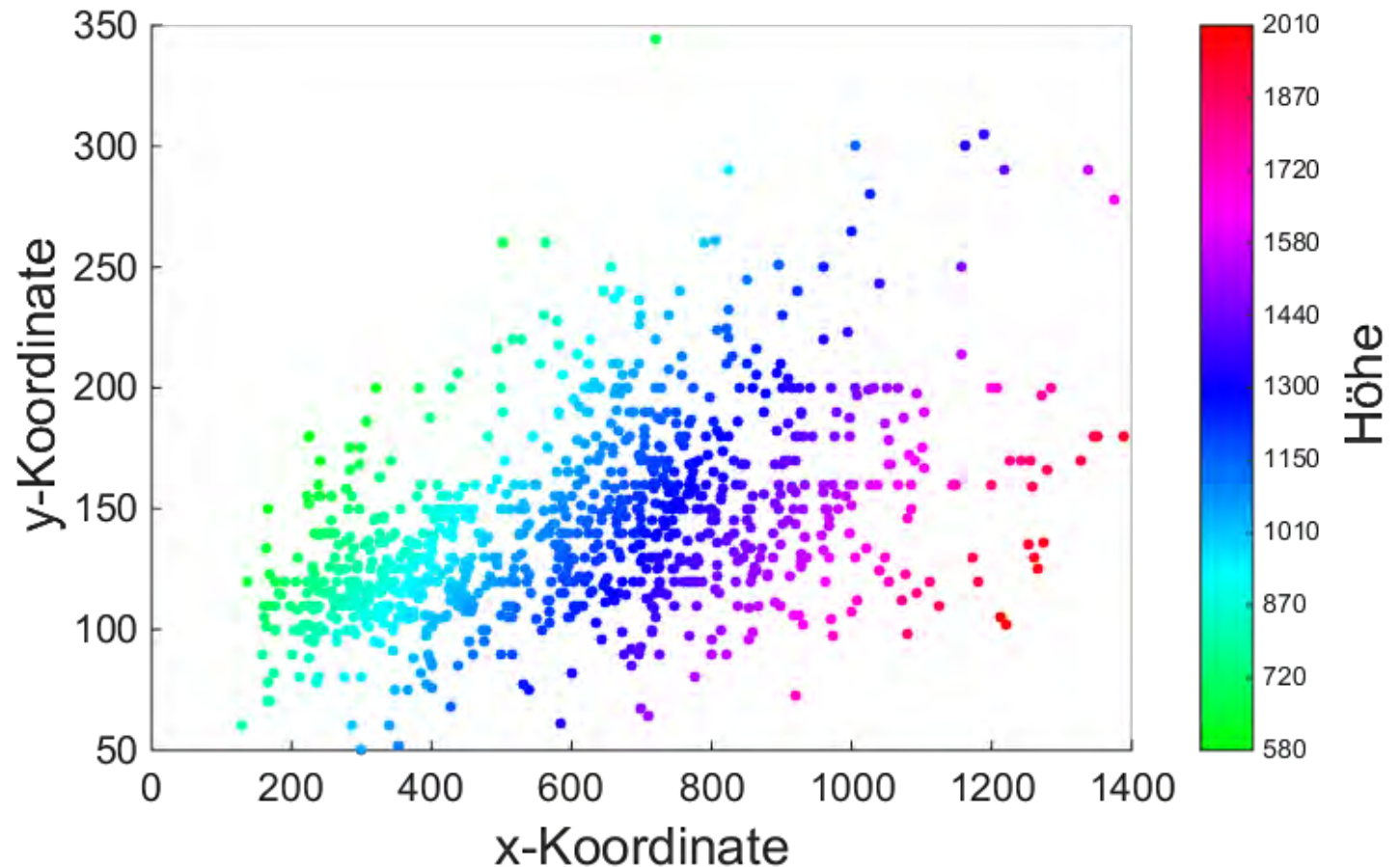




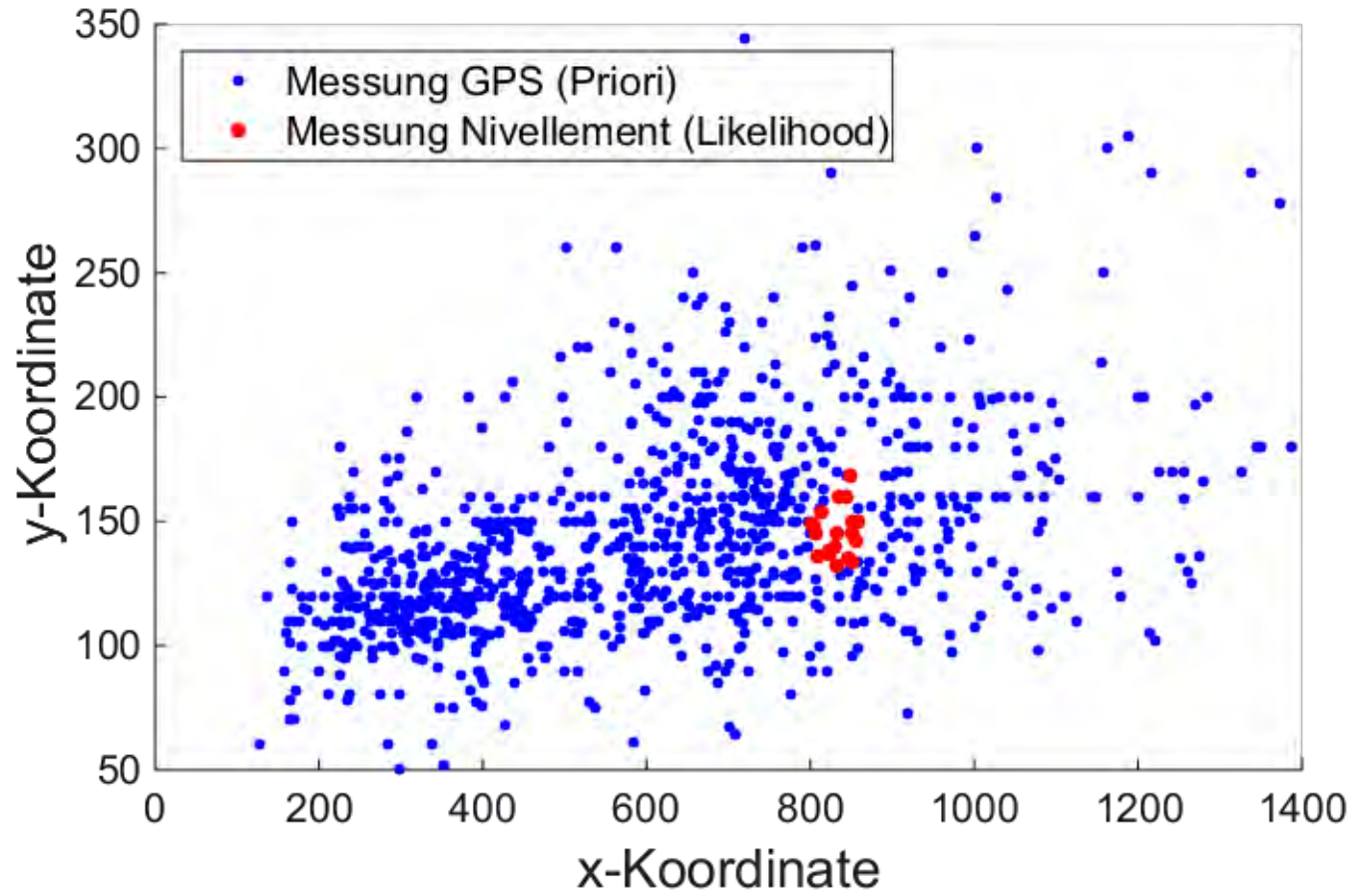
Alexander Dorndorf, M.Sc.

GEODÄTISCHES INSTITUT HANNOVER

Entwicklung eines robusten Bayesschen Ansatzes für
klein-redundante Ausgleichungsmodelle



Funktionaler Zusammenhang: $h = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot y$



1. Bayesischer Ansatz
2. Vorstellung eines robusten Bayesschen Ansatzes
3. Validierung des robusten Bayesschen Ansatzes
4. Fazit und Ausblick

Bayesischer Ansatz: $P(\bar{\beta}|\mathbf{y}) \propto P(\underline{\beta}) P(\mathbf{y}|\beta)$

- Kombiniert Prioriwissen und Daten mit Hilfe des Bayes-Theorems auf Basis von Wahrscheinlichkeitsdichten

Bayesischer Ansatz: $P(\bar{\beta}|\mathbf{y}) \propto P(\underline{\beta}) P(\mathbf{y}|\beta)$

- Kombiniert Prioriwissen und Daten mit Hilfe des Bayes-Theorems auf Basis von Wahrscheinlichkeitsdichten

Priori-Dichte: $P(\underline{\beta})$

- Ergebnis einer vorherigen Ausgleichung
- Ergebnis einer Expertenbefragung
- Herstellerangaben z.B. Fehlerquellen von Messinstrument
- Vorwissen über die Objektgeometrie oder Messkonfiguration

Bayesischer Ansatz: $P(\bar{\beta}|\mathbf{y}) \propto P(\underline{\beta}) P(\mathbf{y}|\beta)$

- Kombiniert Prioriwissen und Daten mit Hilfe des Bayes-Theorems auf Basis von Wahrscheinlichkeitsdichten

Priori-Dichte: $P(\underline{\beta})$

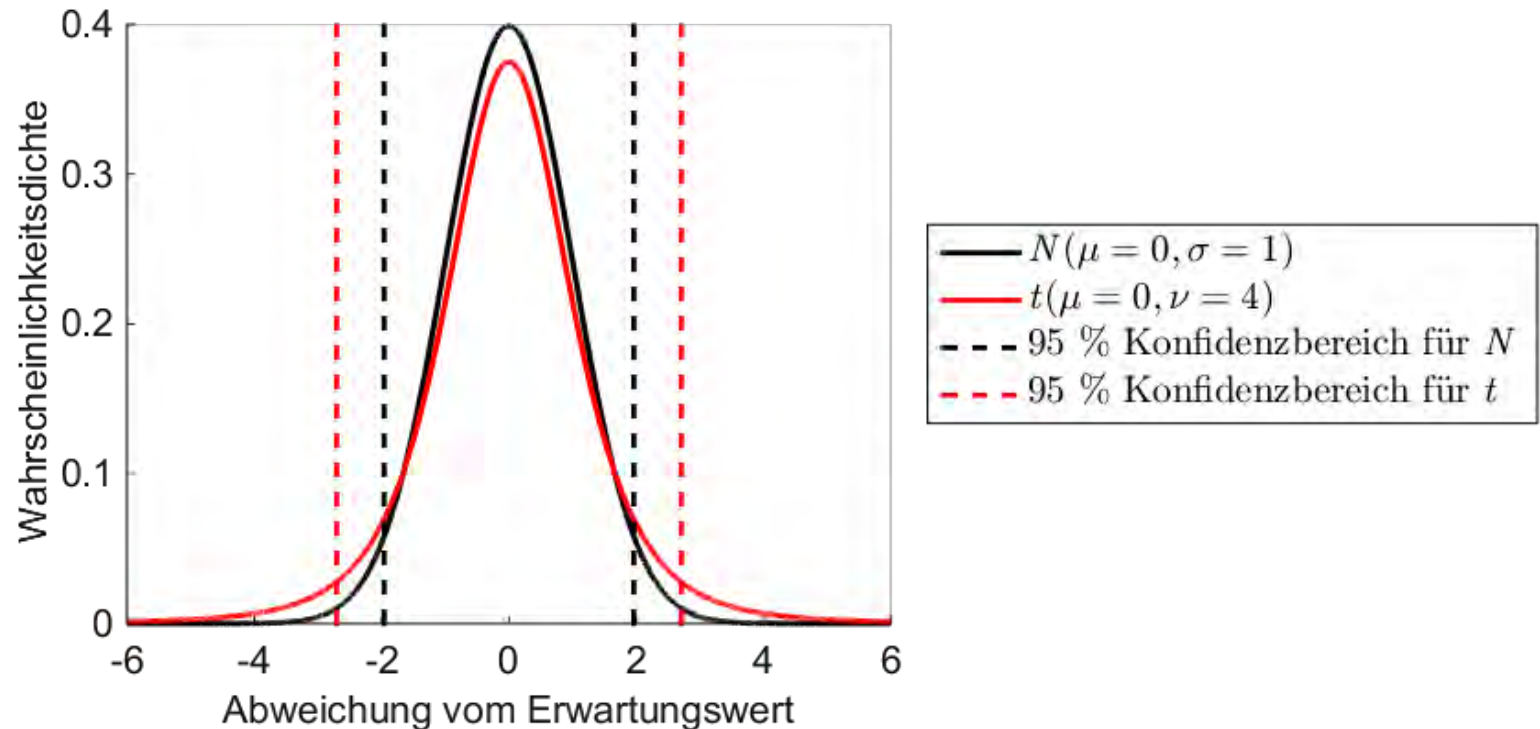
- Ergebnis einer vorherigen Ausgleichung
- Ergebnis einer Expertenbefragung
- Herstellerangaben z.B. Fehlerquellen von Messinstrument
- Vorwissen über die Objektgeometrie oder Messkonfiguration

Likelihood-Funktion: $P(\mathbf{y}|\beta)$

- Messungen (Beobachtungen)
- Verteilungsannahmen der zu schätzenden Fehler

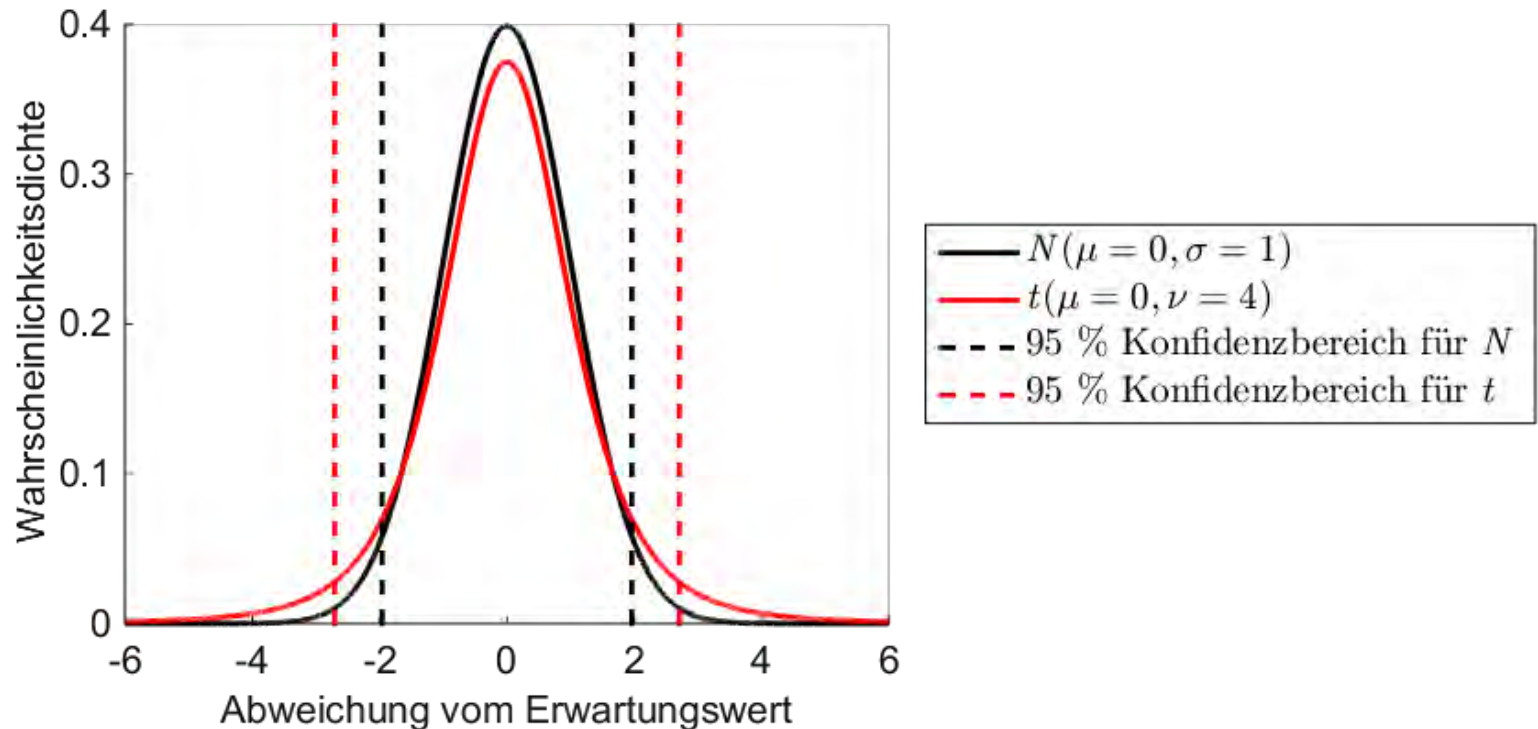
Bayesischer Ansatz: $P(\bar{\beta}|\mathbf{y}) \propto P(\underline{\beta}) P(\mathbf{y}|\beta)$

Verteilung der Beobachtungen



Bayesischer Ansatz: $P(\bar{\beta}|\mathbf{y}) \propto P(\underline{\beta}) P(\mathbf{y}|\beta)$

Verteilung der Beobachtungen



Student-Verteilung unempfindlicher gegenüber Ausreißern

Ansatz: t-Verteilung für Gewichtung der Likelihood-Funktion

- Likelihood: $P(\mathbf{y} | \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon})) \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}))$
- Priori-Dichte: $P(\underline{\boldsymbol{\beta}}, \sigma, \boldsymbol{\omega}) \propto P(\underline{\boldsymbol{\beta}}) P(\sigma) P(\boldsymbol{\omega})$
und $\underline{\boldsymbol{\beta}}, \sigma, \boldsymbol{\omega}$ sind stochastisch unabhängig
- Posteriori Dichte: $\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{X} + \sigma^2 \underline{\mathbf{V}}^{-1})^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{y} + \sigma^2 \underline{\mathbf{V}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\beta}})$

\mathbf{y} : Unabhängige Daten
(Höhe Nivellement)

\mathbf{X} : Abhängige Einflussgrößen
(Koordinaten)

$\bar{\boldsymbol{\beta}}$: Posteriori-Dichte
(Regressionskoeffizienten)

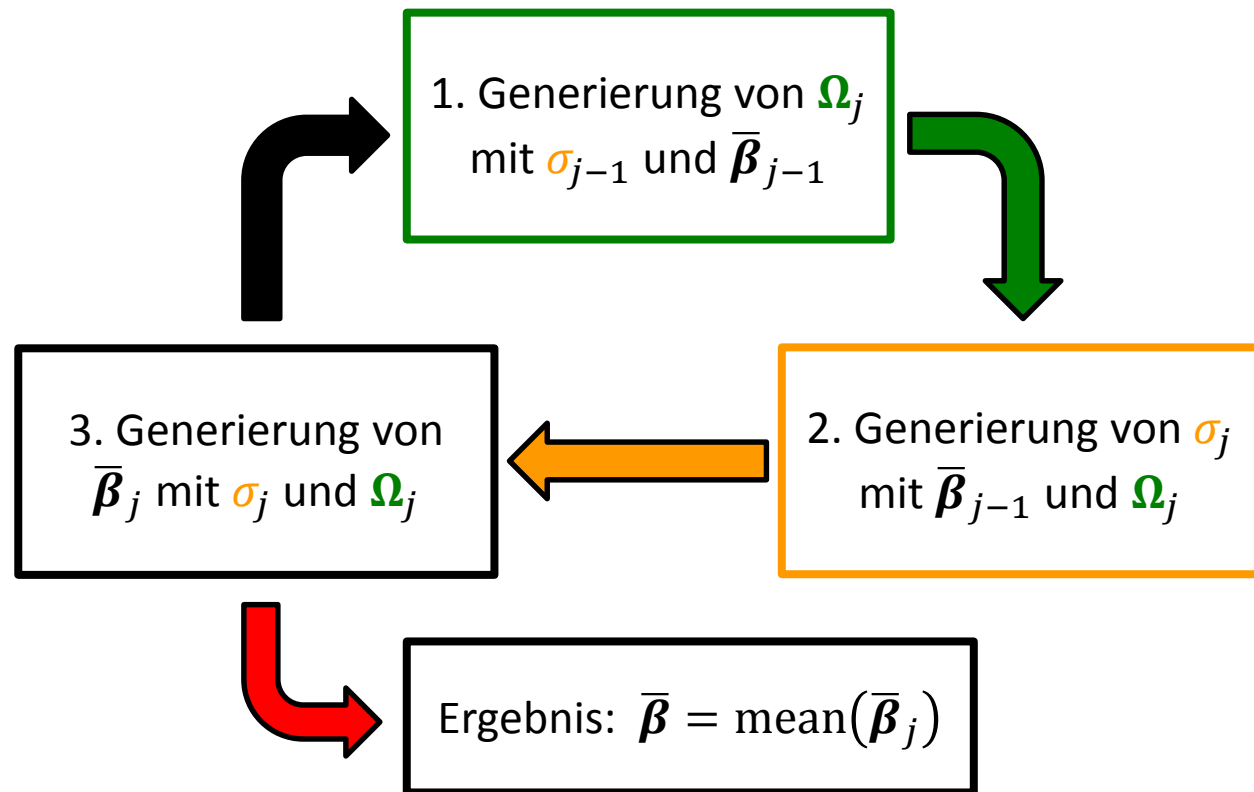
$\underline{\boldsymbol{\beta}}$: Priori-Wissen über Koeffizienten aus GPS

$\underline{\mathbf{V}}$: VKM der Priori-Koeffizienten aus GPS

σ^2 : Priori-Wissen Varianzfaktor. Gewichtung der
Priori-Dichte mit der Likelihood Funktion

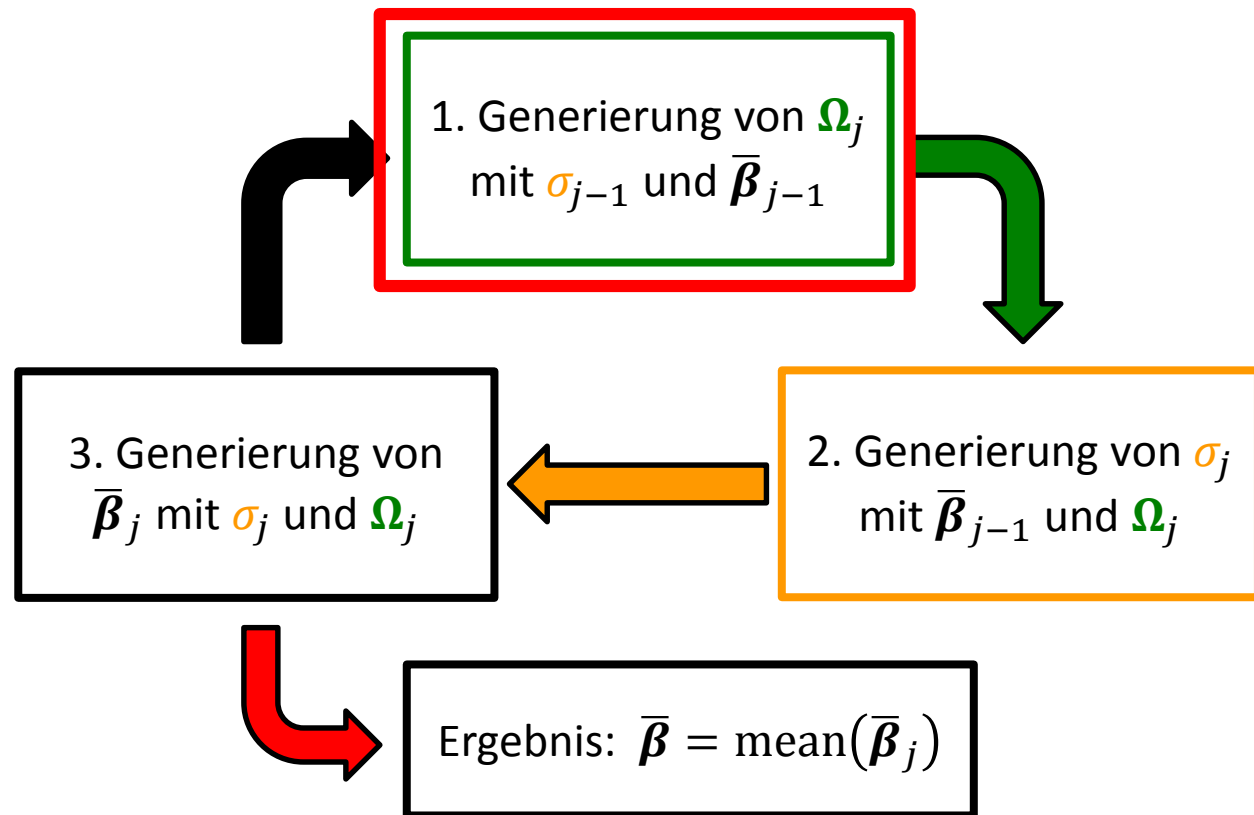
$\boldsymbol{\Omega}$: Priori-Wissen Gewichtsmatrix Likelihood

Numerische Lösung der Posteriori-Dichte mit Markov-Chain-Monte-Carlo



Schematischer Ablauf Gibbs-Sampler

Numerische Lösung der Posteriori-Dichte mit Markov-Chain-Monte-Carlo

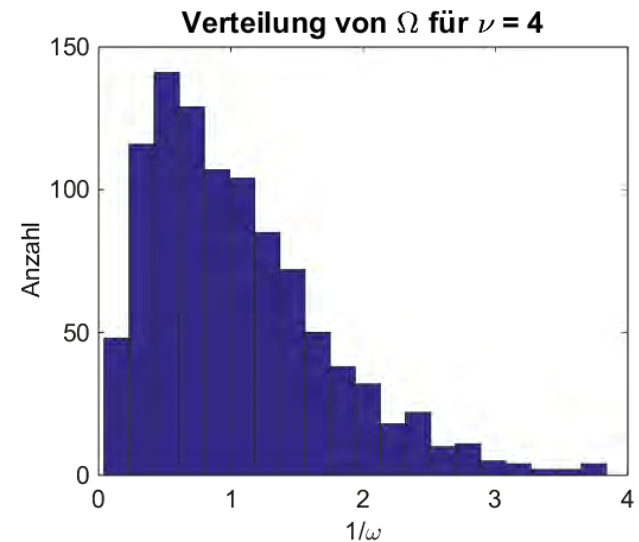
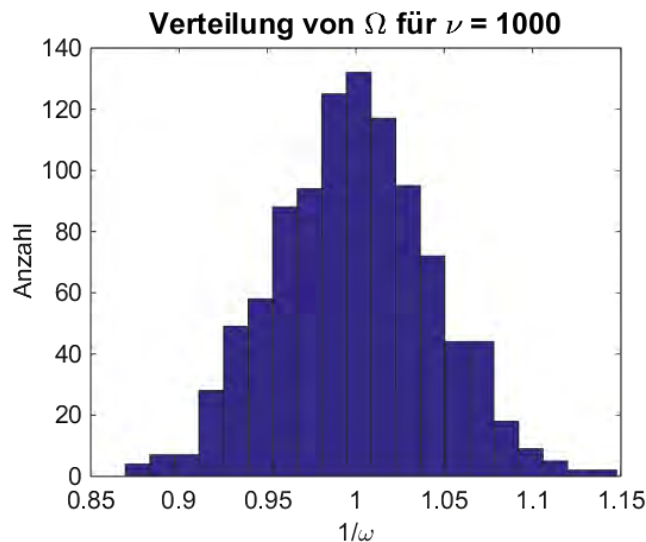


Schematischer Ablauf Gibbs-Sampler

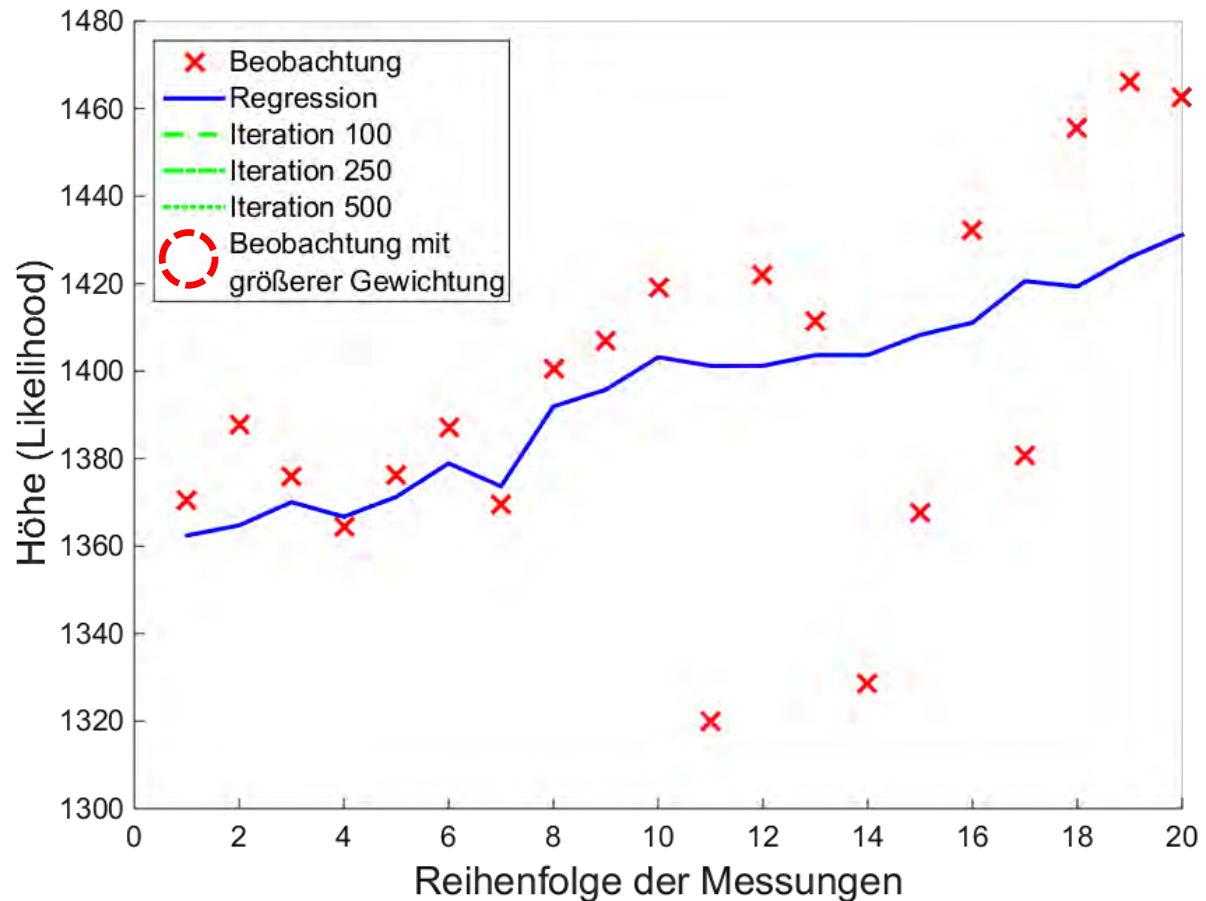
Bestimmung der Gewichte ω mit der t-Verteilung:

$$\frac{(\sigma^{-2} \varepsilon_i^2 + \nu)}{\omega_i} \left| (\bar{\beta}, \sigma) \sim \chi^2(\nu + 1) \quad \text{mit } \varepsilon_i^2 = (y_i - X_i \bar{\beta})^2 \right.$$

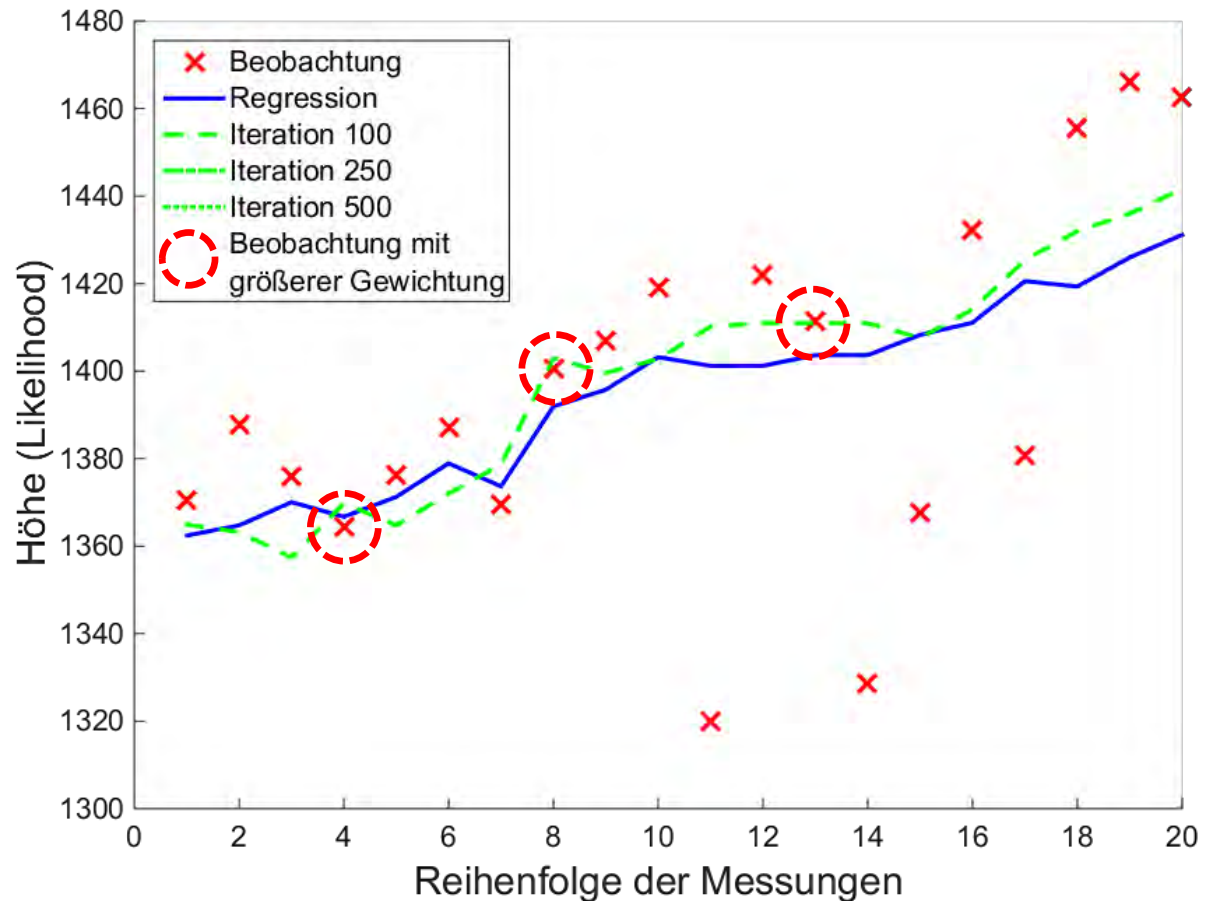
$$\Omega_j = \begin{bmatrix} 1/\omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\omega_n \end{bmatrix}$$



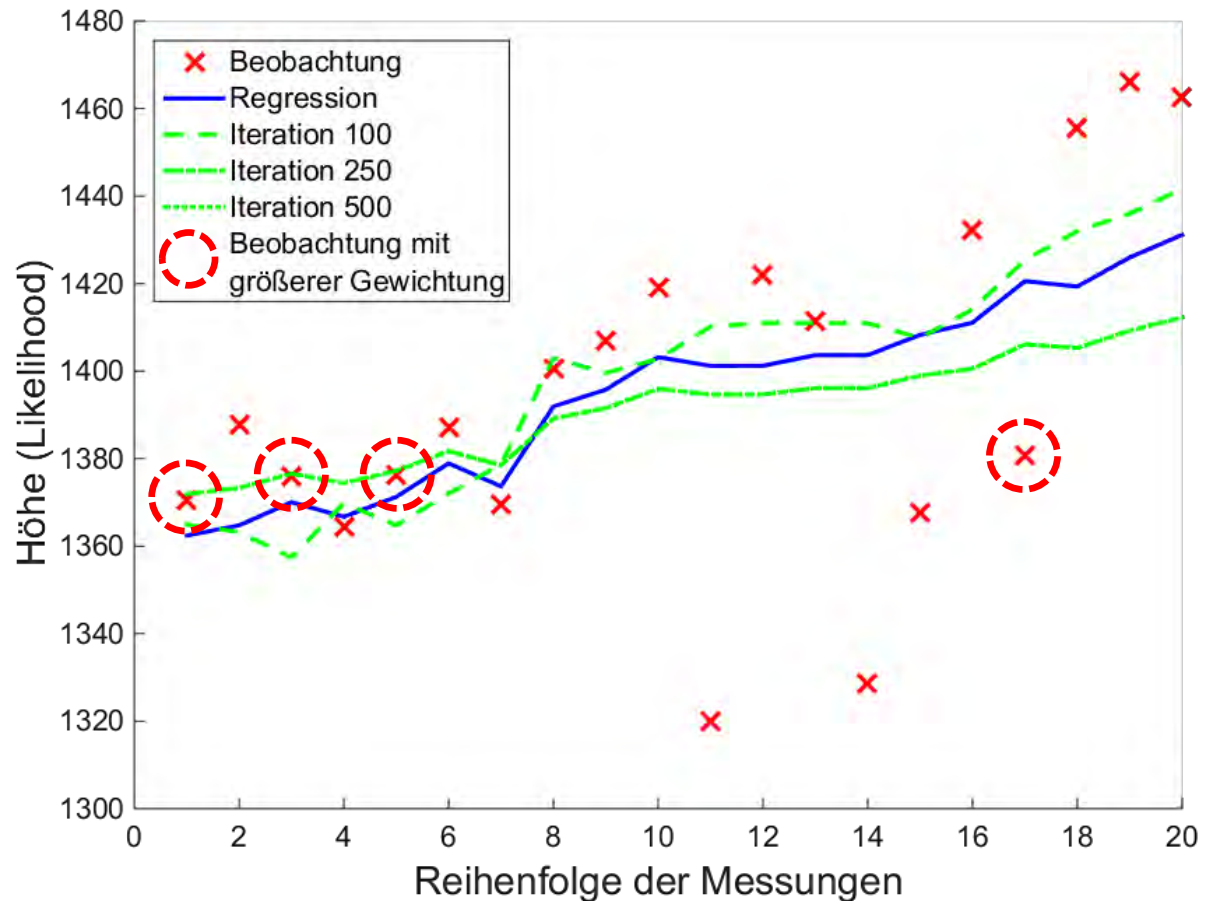
Iterationen Gibbs-Sampler: 5000



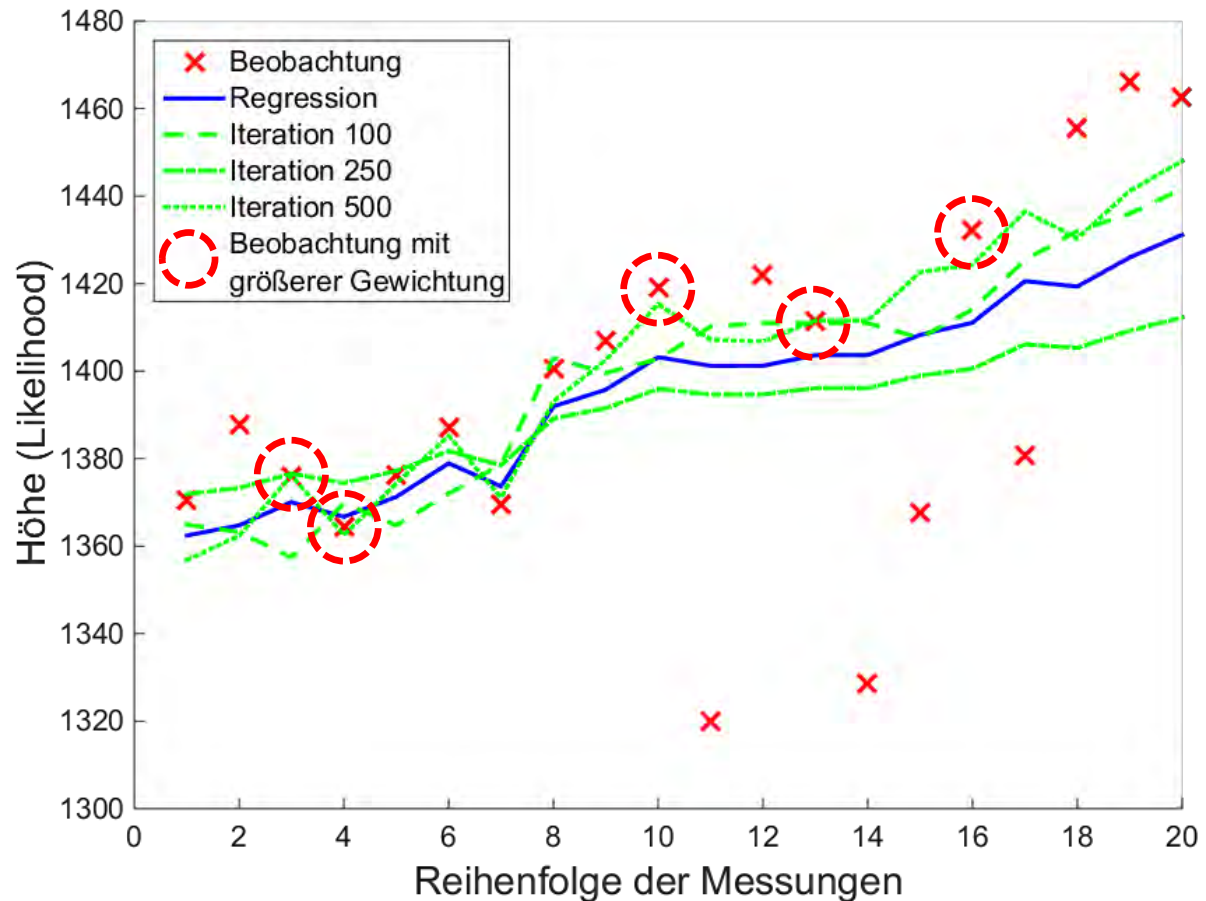
Iterationen Gibbs-Sampler: 5000



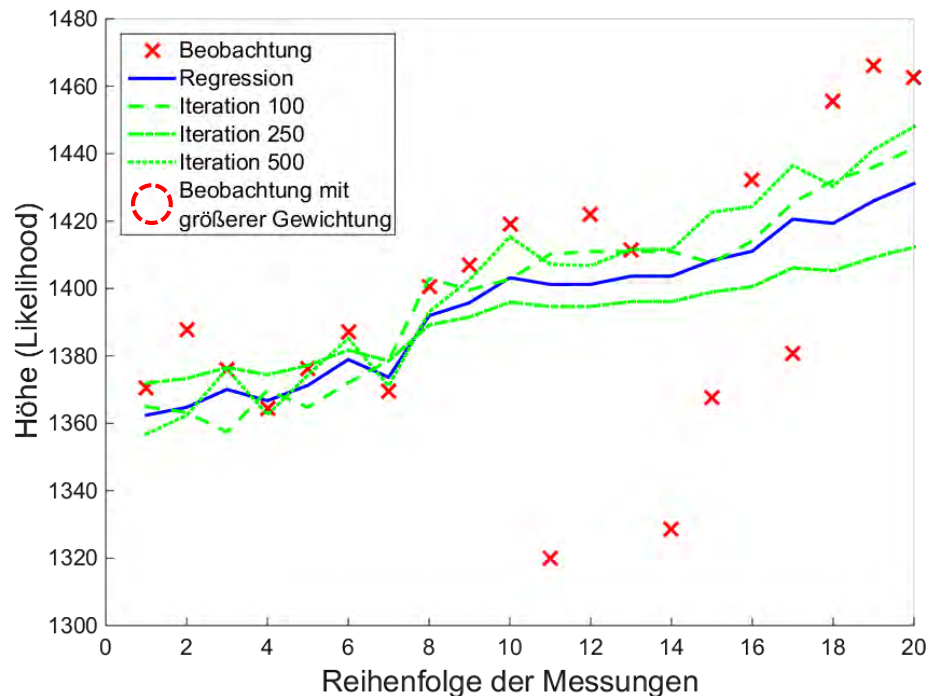
Iterationen Gibbs-Sampler: 5000



Iterationen Gibbs-Sampler: 5000



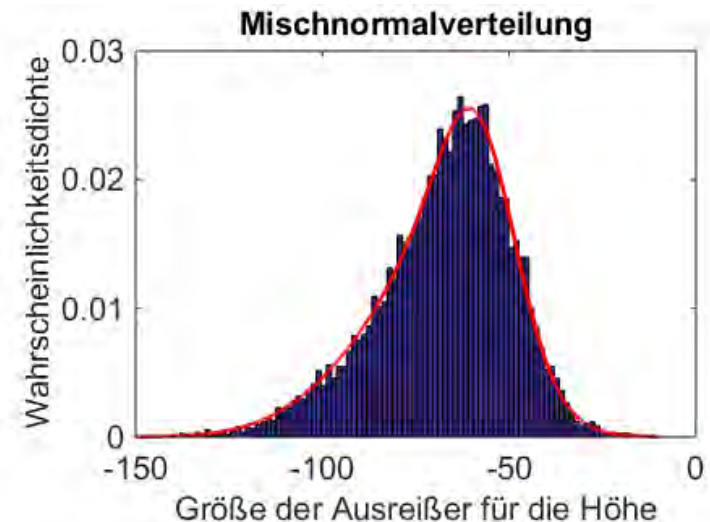
In jeder Iteration j werden neue Gewichte gezogen



Ausreißeranteil $< 50\%$ \Rightarrow Beobachtungen ohne Ausreißer werden öfter zur Berechnung von $\bar{\beta}$ verwendet

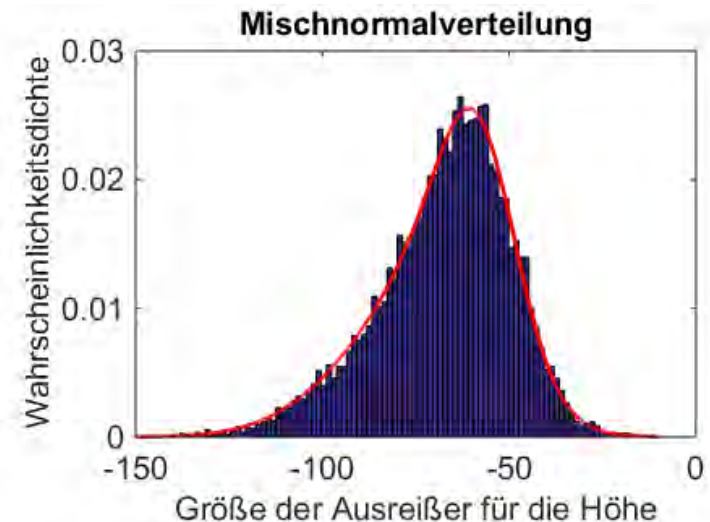
Sensitivitätsanalyse mit Monte-Carlo-Simulation (MCS)

- Anzahl Priori: 1000 Messungen
- Anzahl Likelihood: 20 Messungen
- Messrauschen σ_{Priori} : $15 \cdot \sigma_{\text{Likelihood}}$
- Anteil Ausreißer: 20%
- Verteilung Ausreißer:

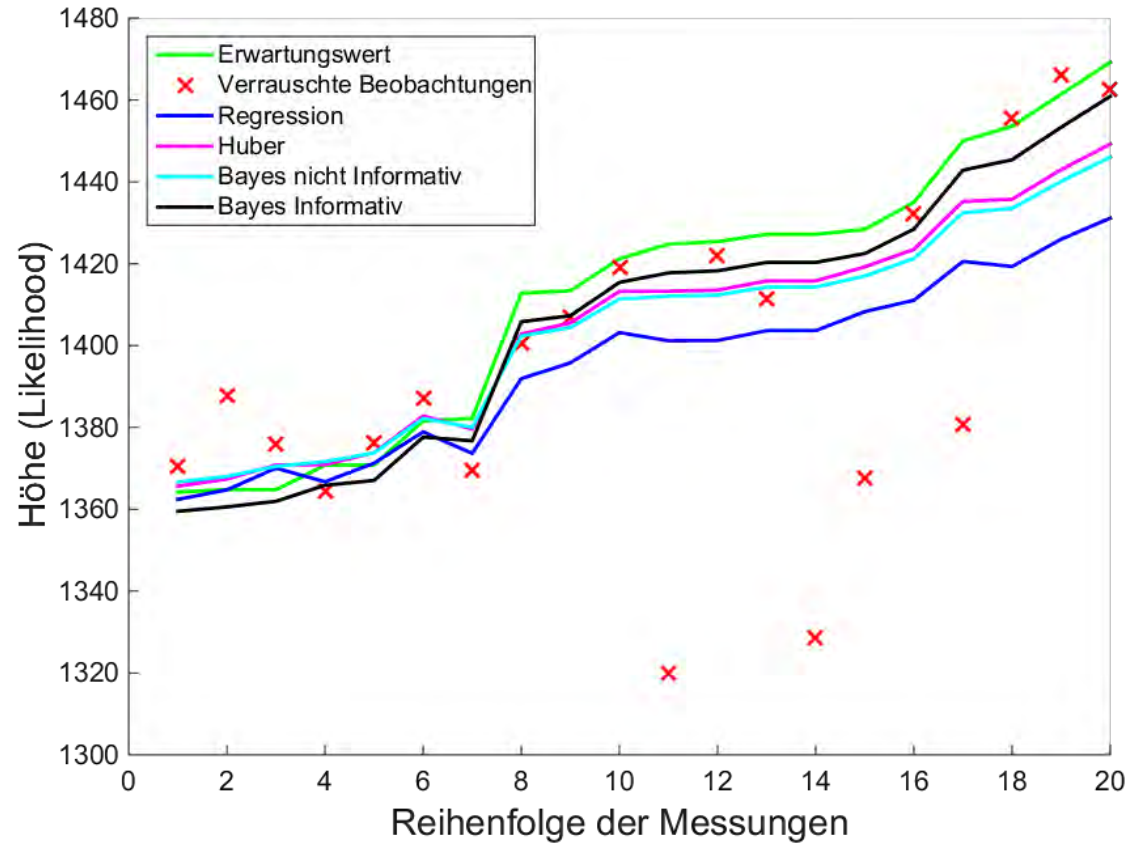


Sensitivitätsanalyse mit Monte-Carlo-Simulation (MCS)

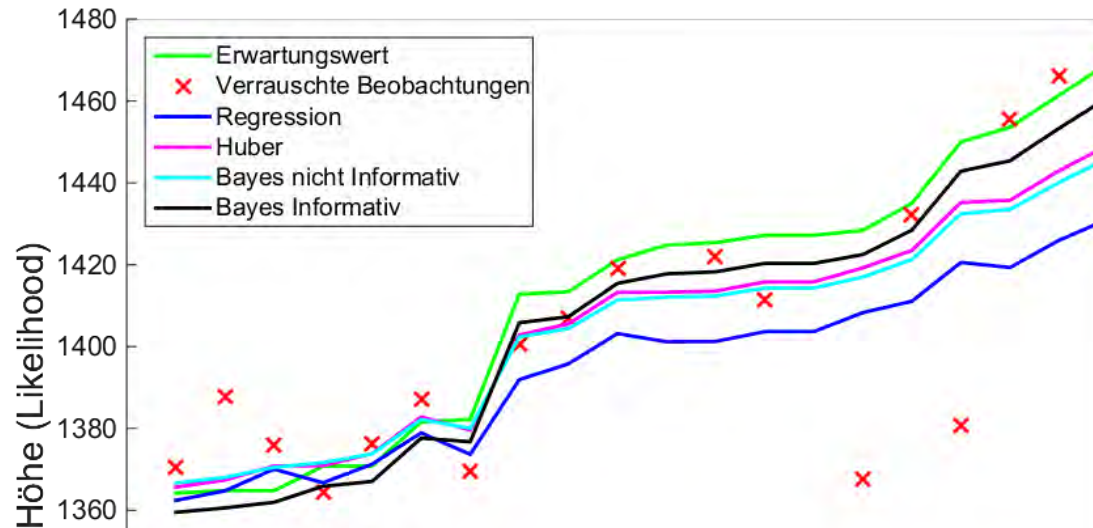
- Anzahl Priori: 1000 Messungen
- Anzahl Likelihood: 20 Messungen
- Messrauschen σ_{Priori} : $15 \cdot \sigma_{\text{Likelihood}}$
- Anteil Ausreißer: 20%
- Verteilung Ausreißer:
 - nicht normalverteilt
 - **Ausreißer $< E(h)$**



Ergebnis für eine Iteration der Sensitivitätsanalyse



Ergebnis für eine Iteration der Sensitivitätsanalyse



Ergebnis der MCS für 10.000 Iterationen

	Beobachtung y	Klassisch		Bayes Robust	
		Regression	Huber	Nicht Informativ	Informativ
RMSE zu $E(y)$	32,42	16,49	10,25	10,19	3,94

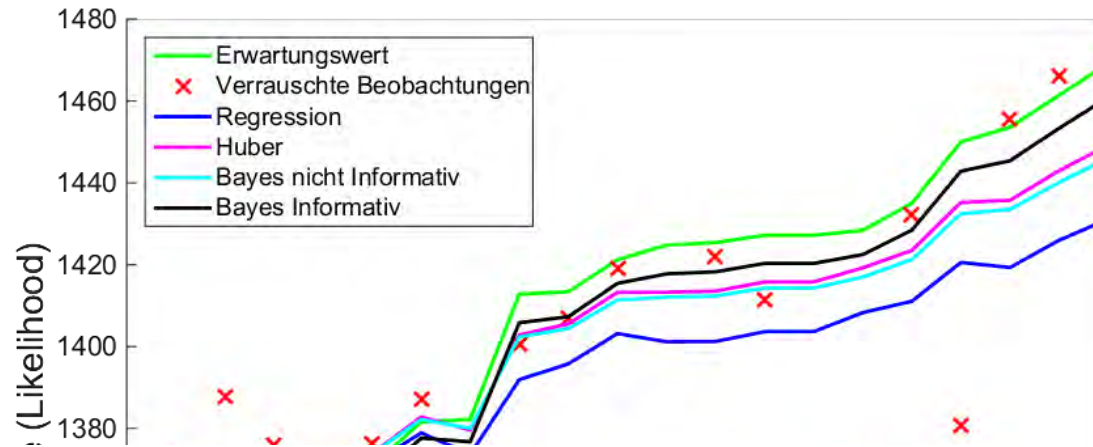
- Die Priori-Dichte beeinflusst die Posteriori-Dichte stärker bei kleinen n der Likelihood
- Robustheit hängt vom Freiheitsgrad ν ab
- Zukünftige Arbeiten:
 - Freiheitsgrad ν mitschätzen
 - Kombinierung verschiedener Priori-Informationen
 - Varianzfaktor für Gewichtung optimieren

- Die Priori-Dichte beeinflusst die Posteriori-Dichte stärker bei kleinen n der Likelihood
- Robustheit hängt vom Freiheitsgrad ν ab
- Zukünftige Arbeiten:
 - Freiheitsgrad ν mitschätzen
 - Kombinierung verschiedener Priori-Informationen
 - Varianzfaktor für Gewichtung optimieren

- DFG Projekt:  &   TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Immobilienbewertung in kaufpreisarmen Lagen durch ein Robustes Bayesisches hedonisches Modell (WE 5631/1-1)

Ergebnis für eine Iteration der Sensitivitätsanalyse



Ergebnis der MCS für 10.000 Iterationen

	Regression		Huber		Nicht Informativ		Informativ	
$\Delta b1 / \sigma1$	-14,02	326,53	-1,58	259,076	-2,13	249,57	-0,15	17,92
$\Delta b2 / \sigma2$	0,0005	0,38336	0,0019	0,3010	0,0040	0,2898	-0,0068	0,0162
$\Delta b3 / \sigma3$	-0,0002	0,7208	-0,0517	0,5880	-0,0597	0,5651	0,0177	0,1286
RMSE von y	16,49		10,25		10,19		3,94	