Numerische Integration des Schwarzschild Problems mit Hilfe von Lie-Reihen

Institut für Erdmessung

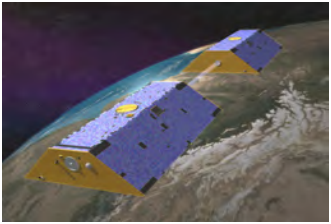
Leibniz Universität Hannover

Liliane Biskupek, Enrico Mai | 15.09.2015

Inhalt des Vortrags

- **Einleitung**
- **Theoretischer Hintergrund**
  - Lie-Reihen Ansatz
  - Relativistisches Zwei-Körper-Problem
- **Berechnung**
- **Zusammenfassung und weiteres Vorgehen**

Einleitung



- Genauigkeit der Entfernungsmessung: 10 nm
- Berücksichtigung relativistischer Effekte bei
  - Bahnbestimmung
  - Signalausbreitung
  - Zeitbestimmung
- Post-Newton'sche Approximationen nicht ausreichend
  $\rightarrow$ Analytische Formulierung

Einleitung

- Berechnung von Satellitenbahnen heute meist numerisch

  Vorteile: hohe Genauigkeiten für kurze und mittlere Bahnbögen; einfache Erweiterung um zusätzliche Kräfte möglich

  Nachteil: Lösungen vom Ausgangsproblem abhängig und nicht allgemeingültig

- Analytische Verfahren zur Orbitintegration

  Vorteil: direkte Einblick in physikalischen Eigenschaften und Zusammenhänge, da spektral

→ Verknüpfung der Vorteile

→ **semi-analytische Integration über Lie-Reihen**

Lie-Reihen Ansatz

- Hamilton-Funktion H muss bekannt sein
- mehr-Körper-Problem kann über gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) 2. Ordnung beschrieben werden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}\,,$$

mit Position der Körper $\mathbf{x}$, Systemmasse $\mathbf{M}$, geschwindigkeitsabhängiger Dissipation $\boldsymbol{\Gamma}$, Nicht-Linearität $\boldsymbol{\Phi}$ und Inhomogenität $\boldsymbol{\alpha}$; alle Parameter können von Zeit und Ort abhängig sein

Lie-Reihen Ansatz

- Kanonische Gleichungen für Störungsrechnung:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{x}} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{p}}$$

- Hamilton-Funktion:

$$\mathrm{d}H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

- für ungedämpfte Systeme ($\mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$), ohne äußere Anregungskräfte ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$) und Zeit-unabhängig ($\partial H/\partial t = 0$), vereinfacht sich Differentialgleichung und Hamilton-Funktion zu:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m_s}\,\mathbf{p}^T\mathbf{p} + m_s V(\mathbf{x})$$

Lie-Reihen Ansatz

- Taylor-Reihenentwicklung mit Schrittweite Δt:

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \mathbf{f}_k \Big|_{t_0} \qquad \mathbf{p}(t_0 + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \mathbf{g}_k \Big|_{t_0}$$

- Koeffizienten $\mathbf{f}_k$ und $\mathbf{g}_k$ analytisch über Poisson-Klammern

$$\mathbf{f}_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} + \{\mathbf{f}_k, H\} = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} + \{\mathbf{g}_k, H\} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

Relativistisches Zwei-Körper-Problem

- Schwarzschild-Lösung als größter relativistischer Effekt

$$m_s \ddot{\mathbf{r}} + m_s \frac{\mu_\oplus}{r^3}\mathbf{r} = m_s \frac{\mu_\oplus}{c^2 r^3}\left(\frac{4\mu_\oplus}{r}\mathbf{r} - \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r} + 4\left(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\right)\dot{\mathbf{r}}\right)$$

  Masse des Satelliten $m_s = 1$, $\mu_\oplus = GM$, Lichtgeschwindigkeit c
- mit der Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{\mathbf{p}^T\mathbf{p}}{2m_s} - \frac{m_s\mu_\oplus}{r} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\left(\mathbf{p}^T\mathbf{p}\right)^2}{8m_s^3} - \frac{m_s\mu_\oplus^2}{2r^2} + \frac{3\mu_\oplus}{2m_s r}\mathbf{p}^T\mathbf{p}\right)$$

- Poisson-Klammern $\rightarrow$ Lie-Reihen-Koeffizienten $\rightarrow$ Satellitenorbit

Relativistisches Zwei-Körper-Problem

- H nicht explizit zeitabhängig
- für $kmax = 0$

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{p}$$

- für $kmax = 1$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{m_s}\left(1 - \frac{3\mu_\oplus}{c^2 r} - \frac{\mathbf{p}^T\mathbf{p}}{2c^2 m_s^2}\right)\mathbf{p}$$

$$\mathbf{g}_1 = -\frac{m_s\mu_\oplus}{r^3}\left(1 - \frac{\mu_\oplus}{c^2 r} + \frac{3\mathbf{p}^T\mathbf{p}}{2c^2 m_s^2}\right)\mathbf{r}$$

- $kmax = 2$

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{\mu_\oplus}{r^3}\mathbf{r} + \frac{1}{c^2}\frac{\mu_\oplus}{r^3}\left(\frac{4\mu_\oplus}{r}\mathbf{r} - \frac{1}{m_s^2}(\mathbf{p}^T\mathbf{p})\mathbf{r} + \frac{4}{m_s^2}(\mathbf{p}\mathbf{p}^T)\mathbf{r}\right)$$

$$\mathbf{g}_2 = -\frac{\mu_\oplus}{r^3}\mathbf{p} + \frac{3\mu_\oplus}{r^5}(\mathbf{r}\mathbf{r}^T)\mathbf{p} + \frac{1}{c^2}\frac{\mu_\oplus}{r^3}\left\{\frac{3\mu_\oplus}{r^3}(\mathbf{r}\mathbf{p}^T)\mathbf{r}\right. \\ \left. + \left[\left(-\frac{13\mu_\oplus}{r^3} + \frac{3\mathbf{p}^T\mathbf{p}}{m_s^2 r^2}\right)(\mathbf{r}\mathbf{r}^T) + \left(\frac{4\mu_\oplus}{r} - \frac{\mathbf{p}^T\mathbf{p}}{m_s^2}\right)\mathbf{I}_3\right]\mathbf{p}\right\}$$

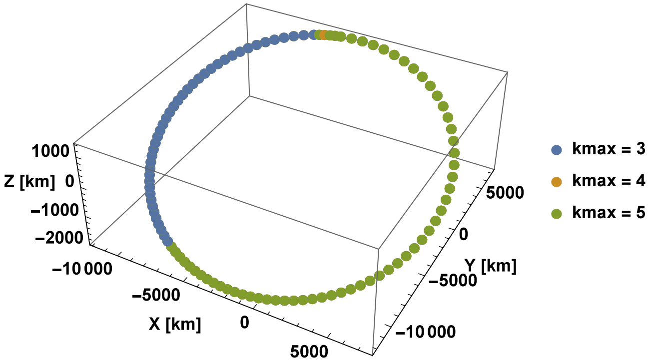
- mit steigendem Grad k steigt Komplexität

Berechnung mit Mathematica

- Lie-Reihen-Koeffizienten kostet viel Rechenzeit
- Test zum Parallelen Rechnen
- verschiedene *kmax*
- $\Delta t = 100s$, $t_{end} = 10000s$

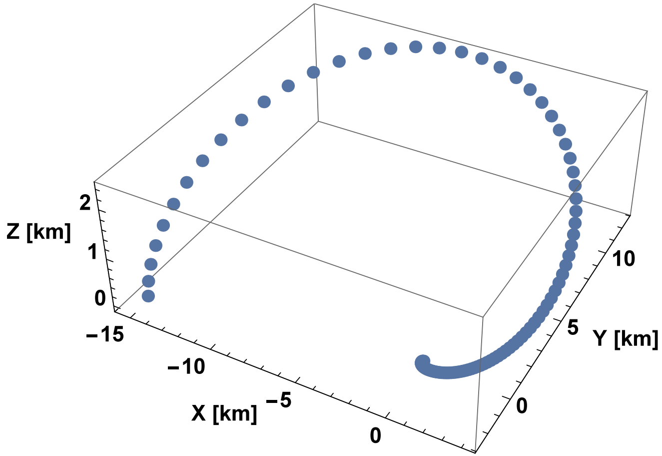
Berechnung mit Mathematica

- Lie-Reihen-Koeffizienten kostet viel Rechenzeit
- Test zum Parallelen Rechnen
- verschiedene *kmax*
- $\Delta t = 100s$, $t_{end} = 10000s$



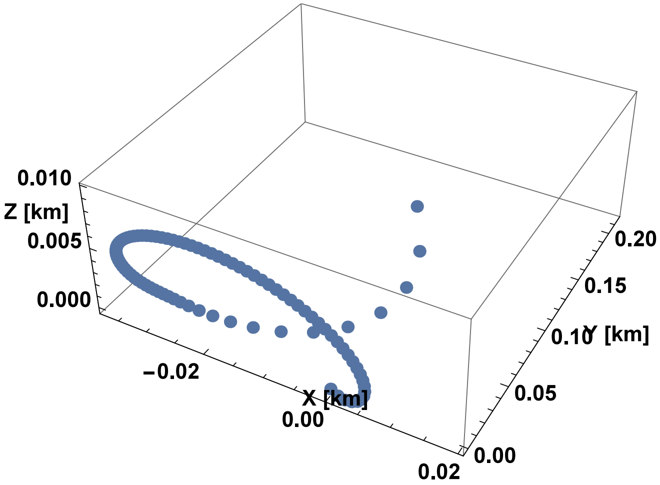
Berechnung mit Mathematica

- Differenz $kmax = 4$ und $kmax = 3$



Berechnung mit Mathematica

- Differenz $kmax = 5$ und $kmax = 4$



Zusammenfassung und weiteres Vorgehen

- Lie-Reihen-Berechnung zur semianalytischen Lösung des Schwarzschild-Problems
- erste Untersuchungen bis $kmax = 5$

Zusammenfassung und weiteres Vorgehen

- Lie-Reihen-Berechnung zur semianalytischen Lösung des Schwarzschild-Problems
- erste Untersuchungen bis $kmax = 5$
- Wie hoch muss $kmax$ sein?
- Rechenzeit $\leftrightarrow$ Genauigkeit
- zum Vergleich: Analytische Lösung des Schwarzschild-Problems

Zusammenfassung und weiteres Vorgehen

- Lie-Reihen-Berechnung zur semianalytischen Lösung des Schwarzschild-Problems
- erste Untersuchungen bis $kmax = 5$
- Wie hoch muss $kmax$ sein?
- Rechenzeit $\leftrightarrow$ Genauigkeit
- zum Vergleich: Analytische Lösung des Schwarzschild-Problems
- Optimierung der Berechnung, z.B. über Rekursionsformeln
- Berechnung täglicher, monatlichen, jährlicher Bahnbögen

  $\rightarrow$ Grundgerüst

- Untersuchung relativistischer Effekte auf verschiedene Satellitenkonstellationen