Geodätische Woche

Das magische Quadrat für stochastische Prozesse

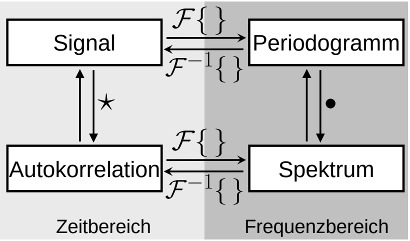
Institut für Geodäsie und Geoinformation
Professur für Theoretische Geodäsie - Universität Bonn

Ina Krasbutter, Boris Kargoll, Wolf-Dieter Schuh

Nürnberg, 27. Sept. 2011

Gliederung

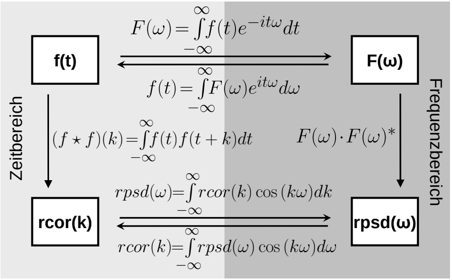
Magisches Quadrat - Motivation

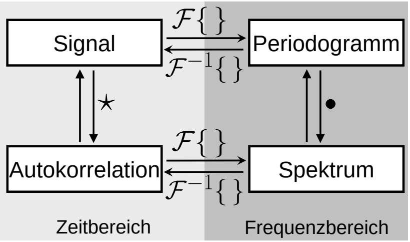


Magisches Quadrat

- Darstellung der Beziehungen: Signal, Periodogramm, Autokorrelation u. Spektrum
- Vorteil: Verschiedene Berechnungsmöglichkeiten für eine Größe

Beispiel: Kontinuierliches, reellwertiges, deterministisches Signal $f(t)$



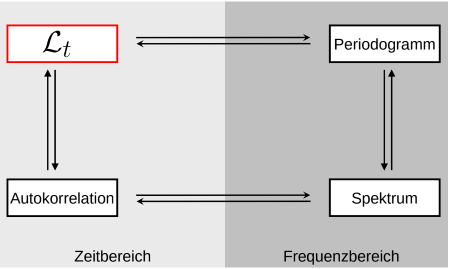


Magisches Quadrat

- Darstellung der Beziehungen: Signal, Periodogramm, Autokorrelation u. Spektrum
- Vorteil: Verschiedene Berechnungsmöglichkeiten für eine Größe

Motivation:

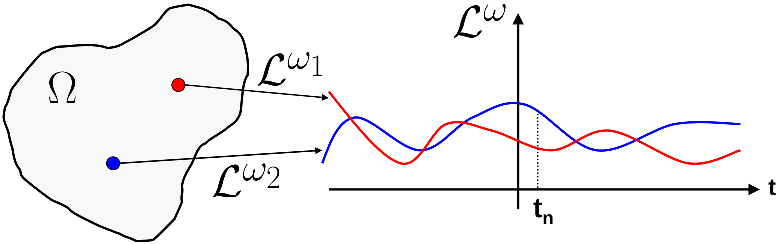
Stochastischer Prozess $\mathcal{L}_T$ [Krasbutter et al., 2011]



Definition

Man definiert $\mathcal{L}_T = (\Omega, \mathcal{A}, P, \{\mathcal{L}_t, t \in T\})$ als einen stochastischen (oder zufälligen) Prozess, wenn

- $(\Omega, \mathcal{A}, P) \ldots$ Wahrscheinlichkeitsraum,
- T ist eine nichtleere Menge,
- $\mathcal{L}_t$ ist eine Zufallsvariable und definiert durch: $\mathcal{L}_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ für jedes $t \in T$



Stochastischer Prozess $\mathcal{L}_T$

Definition

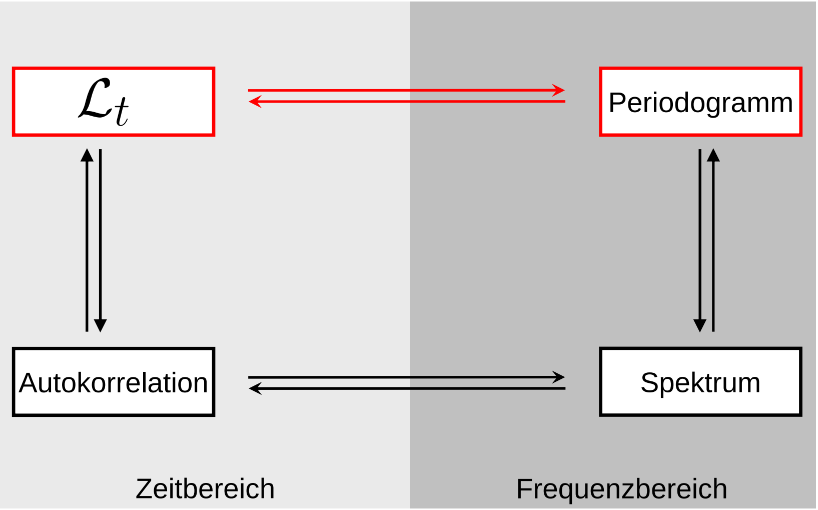
Man definiert $\mathcal{L}_T = (\Omega, \mathcal{A}, P, \{\mathcal{L}_t, t \in T\})$ als einen stochastischen (oder zufälligen) Prozess, wenn

- $(\Omega, \mathcal{A}, P) \ldots$ Wahrscheinlichkeitsraum,
- T ist eine nichtleere Menge,
- $\mathcal{L}_t$ ist eine Zufallsvariable und definiert durch: $\mathcal{L}_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ für jedes $t \in T$

Eigenschaften von $\mathcal{L}_T$

- Eindimensional und reellwertig ($\Omega_t = \mathbb{R}^1$)
- Diskret ($T = \mathbb{Z}$)
- Schwache Stationarität 2. Ordnung
  - $E\{\mathcal{L}_t\} = \mu, E\{(\mathcal{L}_t - \mu)^2\} = \sigma^2_{\mathcal{L}}$, für alle $t \in T$,
  - $\gamma_k^{(\mathcal{L})} := \gamma_{t+k,t}^{(\mathcal{L})}$ für alle $k, t, (t+k) \in T$ und $k \ldots$ Lag

Magisches Quadrat



$$\mathcal{L}_t \rightleftarrows \mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}$$

Stochastischer Prozess $\mathcal{L}_T$:

- Eindimensional, reellwertig ($\Omega_t = \mathbb{R}^1$)
- Diskrete Zeitpunkte ($T = \mathbb{Z}$)
- Schwache Stationarität 2. Ordnung

Stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_W^{(\mathcal{L})}$:

- Eindimensional, komplex ($\Omega_\omega = \mathbb{C}^1$)
- Kontinuierliche Frequenzen $W = [-\pi, \pi]$
- Prozess mit orthogonalen (d.h. unkorrelierten) Inkrementen: $E\{(\mathcal{Z}_{\omega_1}^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_2}^{(\mathcal{L})})(\mathcal{Z}_{\omega_3}^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_4}^{(\mathcal{L})})^*\} = 0$ für $[\omega_1, \omega_2] \cap [\omega_3, \omega_4] = \emptyset$
- Stetig von rechts im quadratischen Mittel: $lim_{\omega \to \omega_0^+} E\{|\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_0}^{(\mathcal{L})}|^2\} = 0$ für alle $\omega_0 \in W$

Magisches Quadrat

$$\boxed{\mathcal{L}_t} \quad \rightleftarrows \quad \boxed{\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}}$$

Stochastisches Riemann-Stieltjes Integral

Stochastischer Prozess $\mathcal{L}_T$:

- Eindimensional, reellwertig ($\Omega_t = \mathbb{R}^1$)
- Diskrete Zeitpunkte ($T = \mathbb{Z}$)
- Schwache Stationarität 2. Ordnung

Stochastischer Prozess $\mathcal{Z}_W^{(\mathcal{L})}$:

- Eindimensional, komplex ($\Omega_\omega = \mathbb{C}^1$)
- Kontinuierliche Frequenzen $W = [-\pi, \pi]$
- Prozess mit orthogonalen (d.h. unkorrelierten) Inkrementen: $E\{(\mathcal{Z}_{\omega_1}^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_2}^{(\mathcal{L})})(\mathcal{Z}_{\omega_3}^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_4}^{(\mathcal{L})})^*\} = 0$ für $[\omega_1, \omega_2] \cap [\omega_3, \omega_4] = \emptyset$
- Stetig von rechts im quadratischen Mittel: $lim_{\omega \to \omega_0^+} E\{|\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_0}^{(\mathcal{L})}|^2\} = 0$ für alle $\omega_0 \in W$

$$\boxed{\mathcal{L}_t} \quad \rightleftarrows \quad \boxed{\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}}$$

Stochastisches Riemann-Stieltjes Integral

Riemann Integral vs. Riemann-Stieltjes Integral

Riemann Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}} \, d \overbrace{t}^{\text{Integrator}}$$

$\xrightarrow{\text{allg.}}$

Riemann-Stieltjes Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}} \, d \overbrace{G(t)}^{\text{Integrator}}$$

Stochastisches Riemann-Stieltjes Integral als Fourier-Integral

$$\mathcal{L}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} d\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}$$

- Integrator: stochastischer Prozess
- Integrand: Exponentialfkt.
- Inverse Darstellung existiert

[vgl. Priestley, 2004, S. 154-155 u. Brockwell/Davis, 1991, Kap. 4.6-4.9]

$\mathcal{L}_t$

$$\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega_2} - \mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega_1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_t \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-it\lambda}\, d\lambda$$

$$\mathcal{L}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\, d\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega}$$

$\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega}$

Autokorrelation

Spektrum

Zeitbereich

Frequenzbereich

Spektrale Verteilungsfunktion

$$\boxed{\gamma_k^{(\mathcal{L})}} \rightleftarrows \boxed{F_\omega^{(\mathcal{L})}}$$

Autokovarianzfkt. $\gamma_k^{(\mathcal{L})}$:

- Deterministisch
- Diskret ($k = \mathbb{Z}$)
- Reellwertig, gerade bzgl. $k = 0$

Spektrale Verteilungsfkt. $F_\omega^{(\mathcal{L})}$:

- Deterministisch
- Reellwertige, kontinuierliche Fkt. ($\omega \in [-\pi, \pi]$)
- $f_\omega^{(\mathcal{L})} = \frac{dF_\omega^{(\mathcal{L})}}{d\omega}$ ... spektrale Dichtefkt. $\longrightarrow$ muss nicht existieren
- Besondere Eigenschaften: $F_{-\pi}^{(\mathcal{L})} = 0, F_\pi^{(\mathcal{L})} = \sigma_\mathcal{L}^2$

Spektrale Verteilungsfunktion

$$\boxed{\gamma_k^{(\mathcal{L})}} \;\rightleftarrows\; \boxed{F_\omega^{(\mathcal{L})}}$$

Riemann-Stieltjes Integral

Autokovarianzfkt. $\gamma_k^{(\mathcal{L})}$:

- Deterministisch
- Diskret $(k = \mathbb{Z})$
- Reellwertig, gerade bzgl. $k = 0$

Spektrale Verteilungsfkt. $F_\omega^{(\mathcal{L})}$:

- Deterministisch
- Reellwertige, kontinuierliche Fkt. $(\omega \in [-\pi, \pi])$
- $f_\omega^{(\mathcal{L})} = \frac{dF_\omega^{(\mathcal{L})}}{d\omega}$ ... spektrale Dichtefkt. $\longrightarrow$ muss nicht existieren
- Besondere Eigenschaften: $F_{-\pi}^{(\mathcal{L})} = 0, F_{\pi}^{(\mathcal{L})} = \sigma_{\mathcal{L}}^2$

$\gamma_k^{(\mathcal{L})}$ $\xrightarrow{\text{Riemann-Stieltjes Integral}}$ $F_\omega^{(\mathcal{L})}$

Riemann Integral vs. Riemann-Stieltjes Integral

Riemann Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}}\, d\, \overbrace{t}^{\text{Integrator}}$$

$\xrightarrow{\text{allg.}}$

Riemann-Stieltjes Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}}\, d\, \overbrace{G(t)}^{\text{Integrator}}$$

Riemann-Stieltjes Integral als Fourier-Integral

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} dF_\omega^{(\mathcal{L})}$$

- Integrator: deterministische Fkt.
- Integrand: Exponentialfkt.

$$\boxed{\gamma_k^{(\mathcal{L})}} \quad \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \quad \boxed{F_\omega^{(\mathcal{L})}}$$

Riemann-Stieltjes Integral

Riemann Integral vs. Riemann-Stieltjes Integral

Riemann Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}} \, d \overbrace{t}^{\text{Integrator}}$$

$\xrightarrow{\text{allg.}}$

Riemann-Stieltjes Integral

$$I = \int_a^b \underbrace{f(t)}_{\text{Integrand}} \, d \overbrace{G(t)}^{\text{Integrator}}$$

Riemann-Stieltjes Integral als Fourier-Integral

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega k) dF_\omega^{(\mathcal{L})}$$

- Integrator: deterministische Fkt.
- Integrand: Exponentialfkt.
  ($\gamma_k^{(\mathcal{L})}$ gerade $\Longrightarrow$ Kosinus)
- Inverse Darstellung existiert

[vgl. Priestley, 2004, S. 214, 222-226]

Magisches Quadrat

$$\mathcal{L}_t \qquad\qquad \mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}$$

$$\mathcal{Z}_{\omega_2}^{(\mathcal{L})} - \mathcal{Z}_{\omega_1}^{(\mathcal{L})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_t \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-it\lambda} d\lambda$$

$$\mathcal{L}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} d\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}$$

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} \qquad\qquad F_\omega^{(\mathcal{L})}$$

$$F_{\omega_2}^{(\mathcal{L})} - F_{\omega_1}^{(\mathcal{L})} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k^{(\mathcal{L})} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(k\lambda)\, d\lambda$$

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega k) dF_\omega^{(\mathcal{L})}$$

Zeitbereich

Frequenzbereich

Stochastisch$\Longrightarrow$ Deterministisch:

Zeitbereich

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} = E\{(\mathcal{L}_t - \mu)(\mathcal{L}_{t+k} - \mu)\}$$

Frequenzbereich

$$\begin{aligned} F_\omega^{(\mathcal{L})} &= E\{\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})} \cdot \mathcal{Z}_\omega^{*(\mathcal{L})}\} \\ &= E\{|\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}|^2\} \end{aligned}$$

Stochastisch $\Longrightarrow$ Deterministisch:

Zeitbereich

$$\gamma_k^{(\mathcal{L})} = E\{(\mathcal{L}_t - \mu)(\mathcal{L}_{t+k} - \mu)\}$$

Frequenzbereich

$$\begin{aligned} F_\omega^{(\mathcal{L})} &= E\{\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})} \cdot \mathcal{Z}_\omega^{*(\mathcal{L})}\} \\ &= E\{|\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})}|^2\} \end{aligned}$$

Stochastisch $\Longleftarrow$ Deterministisch:

$\longrightarrow$ Nicht eindeutig, zusätzliche Annahmen notwendig

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{L}_t \arrow[r, shift left, "\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega_2}-\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega_1}=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_t\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}e^{-it\lambda}d\lambda"] \arrow[d, "E\{(\mathcal{L}_t-\mu)(\mathcal{L}_{t+k}-\mu)\}"] & \mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega} \arrow[l, shift left, "\mathcal{L}_t=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{it\omega}d\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega}"] \arrow[d, "E\{\mathcal{Z}^{(\mathcal{L})}_{\omega}\cdot\mathcal{Z}^{*(\mathcal{L})}_{\omega}\}"'] \\
\gamma^{(\mathcal{L})}_k \arrow[r, shift left, "F^{(\mathcal{L})}_{\omega_2}-F^{(\mathcal{L})}_{\omega_1}=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\gamma^{(\mathcal{L})}_k\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\cos(k\lambda)\,d\lambda"] & F^{(\mathcal{L})}_{\omega} \arrow[l, shift left, "\gamma^{(\mathcal{L})}_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega k)dF^{(\mathcal{L})}_{\omega}"]
\end{tikzcd}
$$

Zeitbereich

Frequenzbereich

Andere Darstellung von $\mathcal{L}_T$

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{X}_t + \psi_1 \mathcal{X}_{t-1} + \ldots + \psi_q \mathcal{X}_{t-q} = \psi(L)\mathcal{X}_t,$$

wobei $\mathcal{X}_T \ldots$ Eingangsprozess, $\psi(L) \ldots$ Filter, $L \ldots$ Lag,
$q \ldots$ Filterordnung (vgl. Moving Average Prozess)

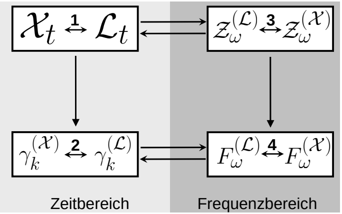
Eigenschaften Filter:

- Nichtrekursiv, kausal, invertierbar (mit inversem Filter $\overline{\psi}(L)$)
- q: Endlich oder unendlich
- Absolut summierbar ($\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k| < \infty$)
  [Brockwell/Davis, 1991, S. 89-91]

Eigenschaften $\mathcal{X}_T, \mathcal{L}_T$:

- Eindimensional, reellwertig ($\Omega_t = \mathbb{R}^1$)
- Diskrete Zeitpunkte ($T = \mathbb{Z}$)
- Schwache Stationarität 2. Ord.

Gefilterter Prozess



Vorteil:

- Erweiterung des magischen Quadrats
- Alle Formeln können dargestellt werden mit: Eingangsprozess und Filterkoeffizienten

Formeln:

1. $\mathcal{L}_t = \psi(L)\mathcal{X}_t$
2. $\gamma_k^{(\mathcal{L})} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \psi_m \psi_n \gamma_{k-m+n}^{(\mathcal{X})}$
3. $d\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{L})} = H_\omega d\mathcal{Z}_\omega^{(\mathcal{X})}$, mit $H_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-ik\omega}$ ... Transferfkt.
4. $dF_\omega^{(\mathcal{L})} = |H_\omega|^2 dF_\omega^{(\mathcal{X})}$, mit $H_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-ik\omega}$ ... Transferfkt.

[vgl. Priestley, 2004, Kap. 4.12 u. Brockwell/Davis, 1991, Kap. 4.4]

Fazit/Ausblick

Fazit

- Übersichtliche Darstellung der mathematischen Beziehungen
- Spektrale Analyse von gefilterten Prozessen ist einfacher

Ausblick

- Veränderung der Eigenschaften:
  1. Rekursiver Filter (z.B. ARMA) [Brockwell/Davis, 1991, Kap. 4.4]
  2. Nicht-Stationäre Prozesse [Priestley, 2004, Kap. 11]
  3. Mehrdimensionale Prozesse
  4. ...

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Literatur

- **Brockwell, P.J. and R.A. Davis (1991)** *Time Series: Theory and Methods.* Second Edition. Springer, New York
- **Krasbutter, I., B. Kargoll and W.-D. Schuh (2011)** *Magic Square of Real Spectral and Time Series Analysis with an Application to Moving Average Processes.* Proceedings of the QuGOMS Workshop 2011 (submitted)
- **Priestley, M.B. (2004)** *Spectral Analysis and Time Series.* Elsevier Academic Press, Amsterdam