Analyse von zeitlichen Variationen bei unregelmäßig vorliegenden räumlichen Daten

Geodätische Woche 2010

Andreas Ernst und Wolf-Dieter Schuh

7. Oktober 2010

Räumliche Daten entstehen inzwischen in vielen Bereichen außerhalb der Geodäsie

- Günstige GNSS Systeme ermöglichen einfache Datenproduktion
- Diese Daten müssen geeignet ausgewertet werden
- Liegen häufig beliebig verteilt im Raum vor

Geoinformationssysteme bieten diverse Interpolations- und Approximationsverfahren an

Wie wird mit diesen Daten weiter umgegangen?

- Wird die Stochastik berücksichtigt?
- Was passiert mit der stochastischen Information?
- Welche Aussagen können mit diesen Daten getroffen werden?

Problemstellung

Datengrundlage:

- **Georeferenzierte Daten** $\mathcal{L}^I$ (Höhen, Schweremessungen, Temperaturen, Agrarerträge)
- **Aus verschiedenen Epochen** I (Wochenweise, Jahresweise)
- An beliebigen Stellen in einem Gebiet gegeben

Ziel: Analyse des zeitlichen Verhaltens der Daten.

- Global (Über das ganze Auswertegebiet)
- Lokal (In bestimmten Teilen des Auswertegebiets)

Untersuchung der zeitlichen Stabilität bzw. Variabilität.
Herrausarbeiten von Trends

Präzisionslandwirtschaft:

- Grasland - Pflanzenvielfalt führt zu heterogenen Ertragseigenschaften
- Für Düngung muss Variabilität lokalisiert werden
- Datengrundlage: Ertragswerte eines Schlages über mehrere Jahre (2003-2007)

Lokale Variationen sind von Interesse

Punktlage

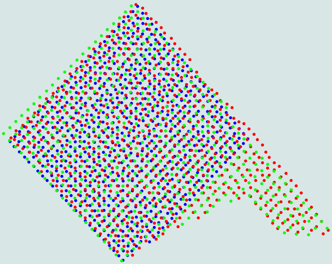
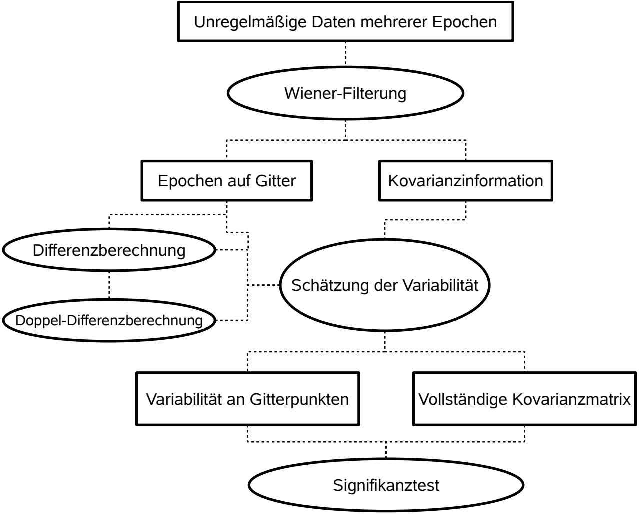
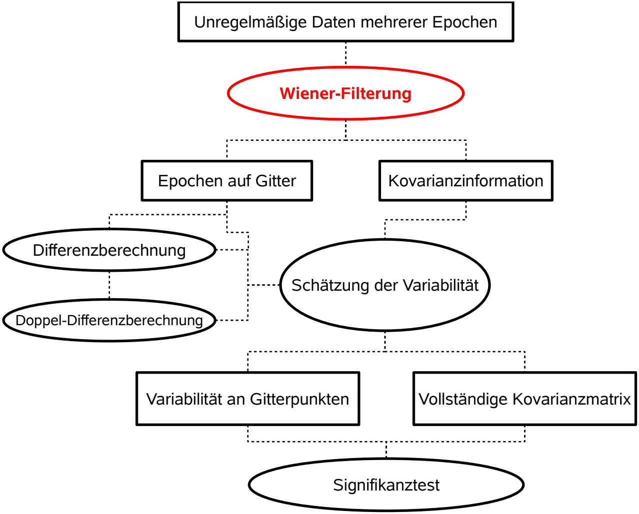


Abbildung: Drei Epochen von Grasland-Ertragswerten

Ablauf des Verfahrens



Wiener-Komogorov-Filterung



Prädiktion der Daten auf ein Gitter:

Separieren der Beobachtungen für Ergodizität

Separieren der Beobachtungen in einen deterministischen Trend und ein Stochastisches Signal

$$\mathcal{L}^I = f^I(\boldsymbol{x}) + \mathcal{S}^I + \mathcal{N}$$
$$\Delta\mathcal{L}^I = \mathcal{L}^I - f^I(\boldsymbol{x})$$

Deterministischer Trend

Zweidimensionales Polynom niedriger Ordnung

- 0. bis 2. Ordnung
- Für jede Epoche eigene Funktion
- Schätzen mit Gauß-Markov-Modell
- Stochastik iterativ verbessern mit $\boldsymbol{\Sigma}\{\Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I\}$

Schätzen von stochstischem Signal $\mathcal{S}^I$

Mittels BLUP-Schätzer:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^I = \Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{S}}^I, \Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I\}\Sigma\{\Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I\}^{-1}\Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I$$

Kovarianzfunktion führt auf Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{\Sigma}$

- Kombination mehrerer Modelle (Gauß-Typ, Besselfunktion)
- Multiplikation mit finitem Träger $\Rightarrow$ **Numerik**

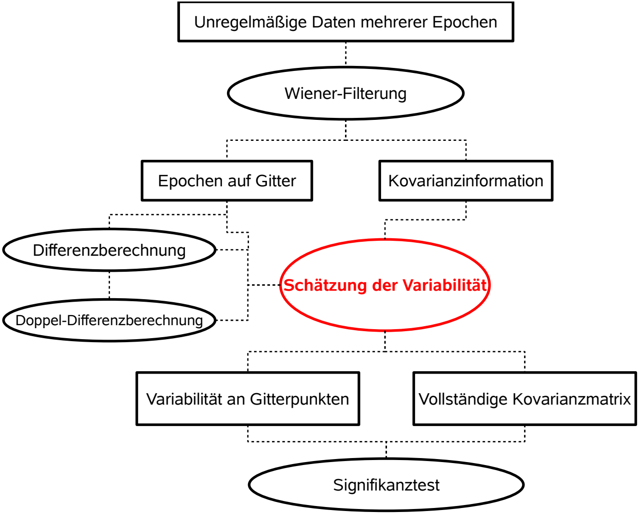
Vollständige gegitterte Daten:

Deterministischer und stochastischer Anteil:

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}^I = f^I(\boldsymbol{x}_R) + \boldsymbol{\mathcal{S}}^I$$

Varianz-/Kovarianzmatrix der Prädiktion

$$\Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{Z}}^I\} = \Sigma\{f^I\} + \Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{S}}^I\} - \Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{S}}^I, \Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I\}\Sigma\{\Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I\}^{-1}\Sigma\{\Delta\boldsymbol{\mathcal{L}}^I, \boldsymbol{\mathcal{S}}^I\}$$


Unregelmäßige Daten mehrerer Epochen
Wiener-Filterung
Epochen auf Gitter
Kovarianzinformation
Differenzberechnung
Doppel-Differenzberechnung
Schätzung der Variabilität
Variabilität an Gitterpunkten
Vollständige Kovarianzmatrix
Signifikanztest

Schätzung der mittleren Abweichung von einem Epochenmittel

Input:

- Gegitterte Daten in mehreren Epochen (Prädiktion, Differenzen, Doppeldifferenzen)
- Varianz-/Kovarianzmatrizen $\Sigma\{\boldsymbol{\mathcal{Z}}^I\}$

Modell:

$$\boldsymbol{z}^I(\boldsymbol{x}_R) + \boldsymbol{v}^I = \overline{\Delta\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}_R) + \overline{z^I}$$

- Globaler Anteil: z^I
- Lokaler Anteil: $\overline{\Delta\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x}_R)$

Schätzung mittels Gauß-Markov-Modell

Nutzen von Differenzen

Beschreiben der **zeitlichen Änderung** der Daten durch Differenzen **aufeinanderfolgender** Epochen, erste zeitl. Ableitung

Input:

- Differenzen aus 2 Epochen I und $I+1$:
  $\Delta \boldsymbol{z}^J(\boldsymbol{x}_R) = \boldsymbol{z}^{I+1}(\boldsymbol{x}_R) - \boldsymbol{z}^I(\boldsymbol{x}_R)$
- Fortgepflanzte Varianz-/Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{\Sigma}\{\Delta \boldsymbol{\mathcal{Z}}^J\}$

Modell:

$$\left(\boldsymbol{z}^{I+1} - \boldsymbol{z}^I\right) + \boldsymbol{v}^J = \overline{\Delta^2 \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_R)} + \overline{\boldsymbol{z}^J}$$

Lokale Variabilität

$\overline{\Delta^2 \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_R)}$ beinhaltet die lokale Variation der Daten gemittelt über alle Differenzepochen J

Einführen von Doppeldifferenzen:

Beschreiben der **Änderung der Variabilität** durch **Doppeldifferenzen**, zweite zeitliche Ableitung.

Input:

- Differenzen aus 2 Differenzepochen J und $J+1$: $\Delta^2 \boldsymbol{z}^K(\boldsymbol{x}_R) = \Delta \boldsymbol{z}^{J+1}(\boldsymbol{x}_R) - \Delta \boldsymbol{z}^J(\boldsymbol{x}_R)$
- Fortgepflanzte Varianz-/Kovarianzmatrizen $\Sigma\{\Delta^2 \mathcal{Z}^K\}$

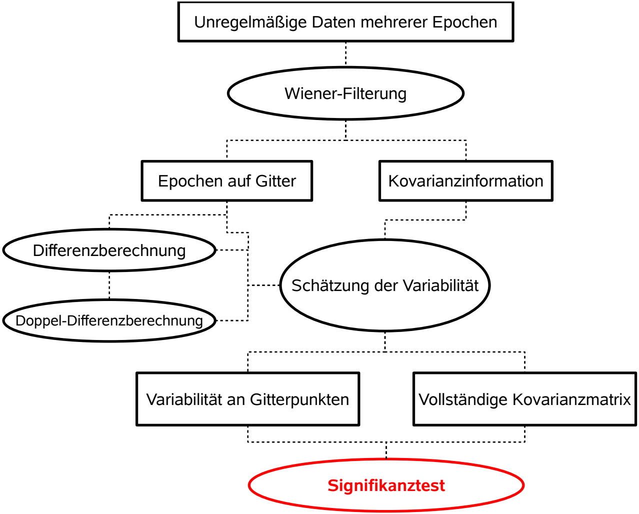
Modell:

$$(\boldsymbol{z}^{J+1} - \boldsymbol{z}^J) + \boldsymbol{v}^K = \overline{\Delta^2 \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_R)} + \overline{\boldsymbol{z}^k}$$

Lokale Variabilitätsänderungen

$\overline{\Delta^2 \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_R)}$ beinhaltet Informationen über die **lokale Änderung** der **Variabilität** der Daten.

Signifikanztest



Testen der geschätzten Parameter auf Signfikanz:

1. Stufe: Parameterschätzung

Modell: $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

Verbesserungen: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}$

Kovarianzmatrix:
$\boldsymbol{\Sigma}\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\} = (\boldsymbol{A}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}$

Varianzfaktor der 1. Stufe:
$\widetilde{s}_1^2 = \frac{\boldsymbol{v}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{v}}{f_1}$

2. Stufe: Restriktionsansatz

Modell: $\boldsymbol{B}^T(\widetilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{b}$

Verbesserungen:
$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\Sigma}\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Sigma}\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{x}}$

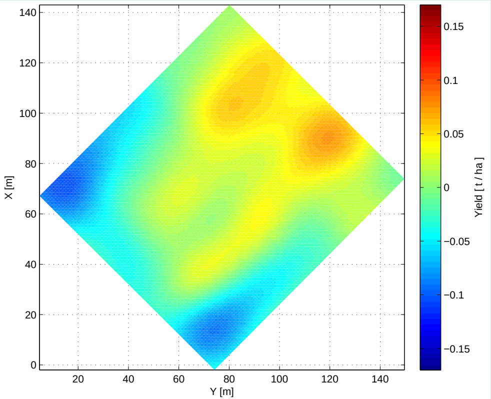
Varianzfaktor der 2. Stufe:
$\widetilde{s}_2^2 = \frac{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{\Sigma}\{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}\}^{-1}\boldsymbol{r}}{f_2}$

Hypothesentest (Fisher-Test)

Nullhypothese: $H_0 : \widetilde{\boldsymbol{x}} = 0$ Alternativhypothese $H_A : \widetilde{\boldsymbol{x}} \neq 0$

Testgröße: $\mathcal{T} = \frac{\widetilde{s}_2^2}{\widetilde{s}_1^2} \sim F^{\gamma}_{f_2,f_1}$ Signifikanzniveau $\gamma = 95\%$

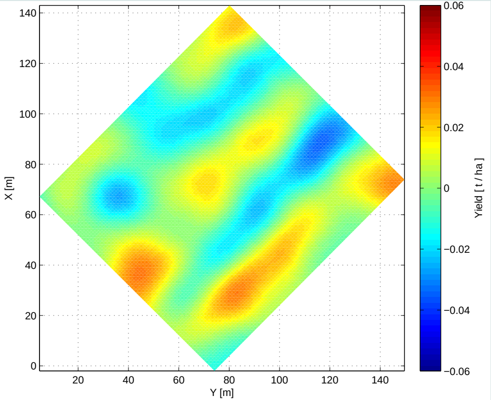
Mittlere Abweichung vom Epochenmittel



Testgröße: $T_1 = 3.466$, Quantil: $K_{F^{0.95}_{f_2,f_1}} = 1.025$

Signifikante Abweichungen vom Epochenmittel

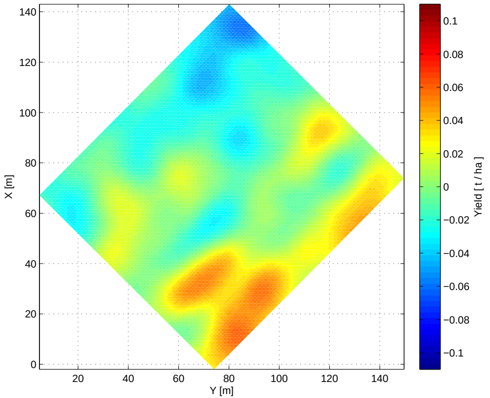
Lokale Variationen aller Epochen



Testgröße: $T_2 = 0.764$, Quantil: $K_{F^{0.95}_{f_2,f_1}} = 1.026$

Signifikante Variationen nicht feststellbar

Änderung der lokalen Variabilität



Testgröße: $T_3 = 0.996$, Quantil: $K_{F^{0.95}_{f_2,f_1}} = 1.028$

Signifikante Variationsänderungen nicht feststellbar

Zusammenfassung

- Ein Verfahren zur konsequenten Behandlung raum-zeitlicher Daten wurde vorgestellt
- Die Stochastik der Daten wurde geschätzt und streng weiterbehandelt
- Zeitliche Effekte können extrahiert werden
- Strenge statistische Aussagen über die Daten sind möglich

Ausblick

- Weitere Anwendungsgebiete sollten getestet werden. Übertragbarkeit? (Altimetrie, Schwerefeld)
- Automatische Schätzung des stochastischen Modells. Adaptive Anpassung der Kovarianzfunktion.
- Wie funktioniert dies bei dichteren größeren Zeitreihen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit